Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre 1964 - Serie IV, vol. XLII, n. 4 (pagg. (248-258)

CARLO FELICE MANARA

QUESTIONI DIDATTICHE

UFFICIO E SIGNIFICATO DELL' ESPERIMENTO NELL' INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da FEDERIGO ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il quarto numero (Ottobre 1964) della quarantaduesima annata consta di 68 pagine e contiene, oltre le Questioni didattiche e Questioni, **i seguenti articoli:**

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre 1964 - Serie IV, vol. XLII, n. 4 (pagg. 248-258)

QUESTIONI DIDATTICHE

Ufficio e significato dell'esperimento nell'insegnamento della geometria

1. - I nuovi orientamenti sull'insegnamento della Matematica introdotti di recente a livello della nuova scuola media (« o scuola dell'obbligo ») hanno fatto ritornare di attualità una questione che ha un'età veneranda, ma che si ripresenta oggi sotto aspetti in qualche modo nuovi fra le discussioni che i nuovi programmi hanno provocato: la questione sul posto e sul significato che l'esperimento può avere nell'insegnamento di una materia come la Matematica, oppure in particolare la Geometria, che di diritto viene considerata come avente un oggetto astratto.

La premessa ai nuovi programmi ufficiali per l'insegnamento della Matematica nella nuova scuola media dice testualmente:

« *L'insegnamento si propone ... anche la sicura acquisizione di alcune essenziali regole e tecniche formali molto utili per l'arricchimento della formazione intellettuale. Giova allo scopo il far ricorso a procedimenti induttivi che muovono da osservazioni, da facili esperimenti e prove empiriche, alle quali l'alunno parteciperà in modo diretto e costante, così da esercitarvi ed educarvi la capacità d'intuizione e lo spirito di ricerca, anche riguardando la figura geometrica non solo sotto l'aspetto statico* ».

Queste parole, le discussioni cui abbiamo accennato ed il conseguente fiorire di una abbondante letteratura sull'argomento (non tutta di primissima qualità), possono far sorgere in molti insegnanti (e — temiamo — sopratutto in quelli che non hanno una solida formazione matematica) l'idea che l'insegnamento della Geometria nella scuola media possa essere costituito quasi esclusivamente di «esperimenti». La inventiva e la fantasia di molti sono dedicate alla ricerca di particolari modelli, di sistemi articolati, di meccanismi più o meno originali costruiti con fili elastici, ed altri materiali, l'uso dei quali potrebbe non soltanto coadiuvare, ma addirittura sostituire l'insegnamento tradizionale della Geometria.

È bensì vero che EMMA CASTELNUOVO, cui si deve buona parte del movimento italiano che sta orientando l'insegnamento verso questi «nuovi» indirizzi, avverte esplicitamente il suo lettore dicendo che ... «questi metodi *non vogliono certo avere carattere di rigoroso studio razionale*, ma vogliono dare delle idee e suscitare problemi» (1). Tuttavia molti indizi fanno temere che non pochi neofiti travisino il pensiero della Autrice, la quale è dotata di vasta cultura e profonda sensibilità, e si facciano portatori di un verbo del quale il meno che si possa dire è, come dice spesso un illustre Amico, che «contiene del nuovo e del giusto; ma purtroppo il giusto non è nuovo ed il nuovo non è giusto».

Troviamo quindi non inutile rimeditare su questi argomenti, tenendo presente che i problemi che sono sul tappeto sono molti e gravi e non possono essere risolti con poche parole; invero gli aspetti sotto cui può essere considerata la questione sono numerosi, come svariati sono i possibili punti di partenza.

Nelle poche pagine che seguono vorremmo brevemente trattare della concezione moderna della Geometria come scienza razionale, che fa parte della Matematica, e dei problemi che sorgono nell'insegnamento di questa scienza nella scuola media. È nostro intento porre in evidenza le gravi difficoltà che sorgono quando si voglia adottare l'atteggiamento tradizionale dell'insegnamento di questa dottrina per i ragazzi dell'età pre-adolescente e d'altra parte i pericoli che si incontrano quando si voglia adottare indiscriminatamente un metodo di tipo «sperimentale» senza le dovute cautele, ed i vantaggi che invece si possano conseguire col suo retto uso.

---

(1) E. CASTELNUOVO, *Didattica della Matematica* (Firenze, 1963), pag. 113; la sottolineatura è nostra.

2. - Dal punto di vista strettamente teorico la questione appare come definitivamente chiusa da molti decenni; precisamente da quando la prova della indipendenza del postulato euclideo della parallela e quindi della perfetta coerenza logica delle Geometrie non euclidee fece perdere alla Geometria classica il suo aspetto tradizionale di scienza « assoluta », basata su assiomi accettati per la loro evidenza, per avviarla ad assumere l'aspetto di una scienza ipotetico-deduttiva, di un puro gioco logico astratto, i cui enti vengono costruiti dalla nostra mente con un processo di astrazione dalla esperienza sensibile ed i cui assiomi vengono suggeriti (non imposti!) dalle esperienze concrete che noi eseguiamo sugli oggetti che ci circondano.

In questo ordine di idee non si può non adottare il punto di vista di H. G. Forder che dichiara: « Se illustriamo i nostri ragionamenti con figure, nulla può essere dedotto da queste se non ciò che è stato esplicitamente postulato. Teoricamente le figure non sono necessarie; in pratica ce n'è bisogno per la debolezza umana. *L'unica loro funzione è quella di aiutare il lettore a seguire i ragionamenti; nel ragionamento in sè stesso non devono avere nessuna parte* » ([2]).

Parallelamente maturava anche la concezione di una geometria « concreta », concepita come primo capitolo della Fisica, anzi di un ristretto capitolo di questa: della Meccanica Razionale; e questa Geometria concreta veniva concepita semplicemente come una teoria atta a razionalizzare le nostre esperienze che riguardano la forma e la mutua posizione degli oggetti concreti su cui operiamo, teoria quindi analoga a qualunque altra teoria della Fisica e quindi soggetta a tutte le limitazioni proprie di questa scienza; in particolare alla limitazione di non essere valida in senso assoluto, ma semplicemente in un certo ordine di approssimazione, variabile da questione a questione, e di essere soggetta a revisioni continue ed aperta a successivi perfezionamenti e anche a rivoluzioni, qualora sorgesse il bisogno di descrivere con maggior esattezza l'ambiente che ci circonda. Prova di ciò che diciamo è il fatto che la Geometria dello spazio reale, ai fini della relatività generale cioè ai fini della schematizzazione di esperienze che tengano conto anche di velocità prossime a

([2]) H. G. Forder, *The foundations of euclidean geometry* (Dover publications, New York, 1958), pag. 43; la sottolineatura è nostra.

quella della luce, molto più ragionevolmente può essere considerata come la Geometria di un continuo riemanniano a curvatura costante piuttosto che come quella di un continuo euclideo.

3. - Questa è dunque la situazione teorica della Geometria nella Matematica attuale; e non mancano matematici che dichiarano apertamente che la Geometria nel senso classico del termine ha cessato di esistere come branca della Matematica, perchè ovviamente hanno interesse matematico soltanto gli schemi concettuali di cui essa si serve (per es. l'Algebra o l'Analisi Matematica) e non i contenuti che in tali schemi si vogliono di volta in volta calare con il linguaggio geometrico. Del resto questa posizione non è molto diversa da quella dei matematici del sec. XIX, che crearono per es. la Geometria proiettiva degli iperspazi oppure la Geometria algebrica, ben consci del fatto che i ragionamenti e le conclusioni tengono soltanto in virtù della struttura logica degli strumenti matematici che di volta in volta sono adoperati: per es. rispettivamente quella che oggi si suole chiamare « Algebra lineare » per la Geometria projettiva degli iperspazi, e la teoria delle funzioni algebriche (considerate come particolari funzioni di variabile complessa) per la Geometria algebrica.

Diremo anzi che questo atteggiamento non era estraneo neppure ai grandi matematici che precedettero il sec. XIX. Se apriamo per es. la « Géométrie » di Cartesio troviamo che egli ad un certo punto discute della natura delle linee di cui tratta la Geometria e si oppone alla classificazione che veniva fatta allora tradizionalmente delle linee in « linee geometriche » e « linee meccaniche », distinzione secondo la quale venivano attribuite alla prima classe la retta e la circonferenza ed alla seconda classe le linee che potevano essere descritte con movimenti compositi o con strumenti meccanici più complicati della riga e del compasso; e dichiara che piuttosto nella Meccanica (intesa come scienza concreta che tratta dei corpi rigidi) si conviene la precisione, perchè in tale scienza la mancanza di precisione è cagione di errori, mentre nella Geometria la mancanza di precisione nel disegno non può avere conseguenze gravi, perchè «... nella Geometria si richiede soltanto la esattezza del ragionamento » (3).

È chiaro pertanto che quando si insegna la Geometria ogni sforzo dovrebbe essere fatto nell'insegnare all'alunno il giusto modo per interpretare ed usare le figure che abitualmente si tracciano; esse da un certo punto di vista possono essere considerate niente altro che dei simboli degli enti che si studiano; da un altro punto di vista esse possono venir considerate (secondo il pensiero di H. G. Forder che abbiamo riportato) come un aiuto per la «... debolezza umana ».

Invero esse ci possono servire per ricordarci sinteticamente tutta una catena di ragionamenti, oppure una serie di proprietà degli enti studiati, oppure infine ci possono servire per suggerirci la strada che dobbiamo seguire nella dimostrazione.

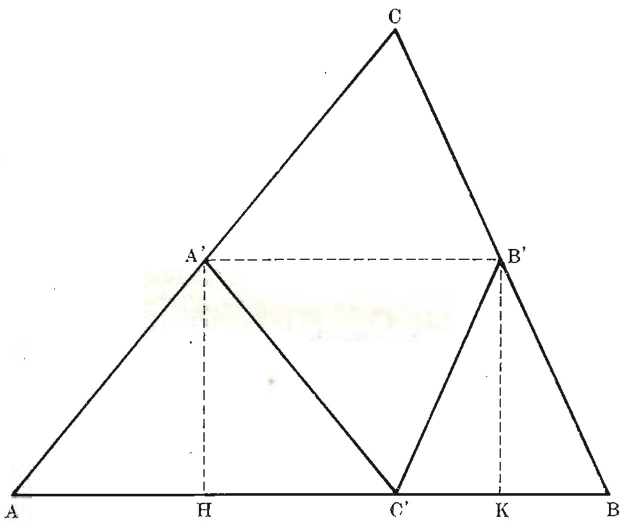

Fig. 1

(3) R. Descartes, *La Géométrie. Livre second; de la nature des lignes courbes.* «... Ce n'est pas non plus, a cause que les instrumens, qui servent a les tracer, estant plus composés que le reigle et le compas, ne peuvent estre si iustes; car il faudroit pour cete raison les reietter des Mechaniques, où la iustesse des ouvrages qui sortent de la main est desirée; plutost que de la Geometrie, ou c'est seulement la iustesse du raisonnement qu'on recherche et qui peut sans doute estre aussy parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres ».

Resta tuttavia fuori discussione che le proprietà degli enti della Geometria non possono mai essere provate sperimentalmente, ma soltanto con il ragionamento rigoroso.

A questo proposito vorremmo ricordare qui di sfuggita un « esperimento » che molto spesso viene citato come una sorta di « dimostrazione » del fatto che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due piatti.

Fatto ritagliare agli scolari il triangolo ABC da un foglio di carta (cfr. fig. 1), considerati i punti medi A' e B' dei due lati AC e BC rispettivamente, si fanno eseguire tre piegature: l'una lungo il segmento che ha come estremi i punti A' e B', le altre due secondo i segmenti $A'H$ e $B'K$ perpendicolari al lato AB; si « constata » allora che i tre angoli del triangolo risultano tutti « trasportati » in un medesimo punto C', e che ivi « riempiono » l'intero angolo piatto.

Per analogia, siamo immediatamente portati a ricordare che con una « esperienza », che per molti aspetti può essere accostata

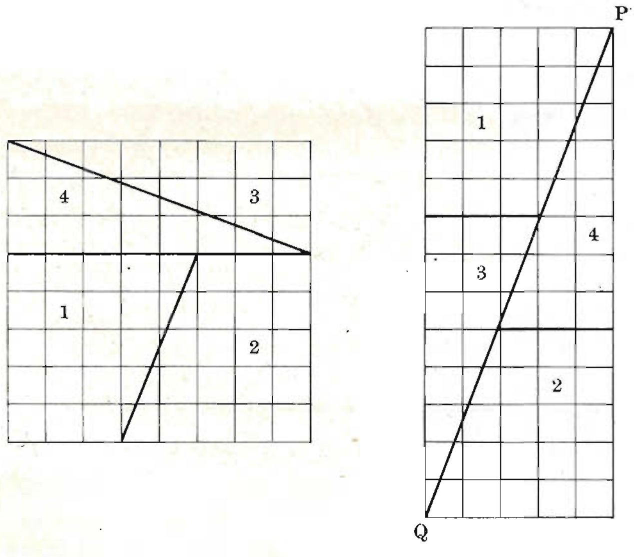

Fig. 2

a questa, si può « far constatare » un assurdo, cioè che $64=65$. Tale esperienza è suggerita dalla annessa figura 2, che si trova in moltissimi libri di Matematica ricreativa: si divida il quadrato di sinistra, che ha come lato un segmento lungo 8, nelle quattro parti, che sono state contraddistinte rispettivamente con i numeri 1, 2, 3, 4 e si riaccostino poi le parti stesse come viene mostrato dalla figura di destra. Le parti vengono «sensibilmente» a combaciare, perchè è evidentemente difficilissimo stabilire se il lievissimo divario tra le linee che attraversano il rettangolo da un vertice al vertice opposto sia dovuto ad errori nel ritagliare la carta oppure al fatto che i segmenti che fanno parte dei perimetri delle parti 3 ed 1 oppure delle parti 2 e 4 rispettivamente non appartengono ad una medesima retta.

Soltanto il ragionamento può condurre alla convinzione che il rettangolo di destra non è interamente ricoperto dalle quattro parti 1, 2, 3, 4 che sono state ritagliate dal quadrato di sinistra, ma che anzi tra esse rimane scoperta una figura a forma di parallelogrammo che ha un'area esattamente uguale a quella di uno dei 64 quadratini in cui è diviso il quadrato di sinistra.

Trovano qui immediata applicazione le considerazioni che abbiamo fatte sulla Geometria considerata come primo capitolo della Fisica: come abbiamo detto, in questo ordine di idee la Geometria è ovviamente sottoposta ai limiti degli errori di osservazione, e quindi si corre sicuro pericolo di grave errore qualora si voglia far assumere ad una operazione materiale, come la misura, un ufficio che questa non può assolvere, come quello di garantire la dimostrazione del fatto che una certa grandezza è uguale ad una certa altra.

Infine non possiamo non ricordare qui che la prima conquista del pensiero geometrico, la conquista cioè della certezza della non esistenza di un «grano» di un «atomo» di spazio, è proprio la conquista di una certezza che supera ogni possibile esperimento; essa consegue, come è noto, dalla accertata esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro (conseguenza immediata, questa, del teorema che viene detto «di Pitagora») o, ancor più semplicemente, se si vuole, dalla accettazione della possibilità della indefinita «dicotomia» del segmento; accettazione che era data per scontata dagli eleati, e formava anzi il nucleo del paradosso che va sotto il nome di Zenone.

In altre parole si può accettare una verifica sperimentale del teorema di Pitagora se si vuole usarlo a scopi pratici (per es. per calcolare la distanza tra due città); invece per dedurre le esistenze di coppie di segmenti incommensurabili occorre aver dimostrato il teorema di Pitagora in modo ineccepibilmente razionale.

4. - Quanto abbiamo esposto nei paragrafi precedenti ci pare possa bastare per dimostrare quanto sia poco utile, anzi, potremmo dire, mentalmente deformante, il fare assumere all'esperimento un ufficio che non gli compete nell'insegnamento della Geometria. Tuttavia abbiamo fin qui soltanto considerato un aspetto della situazione, e precisamente l'aspetto puramente teorico della Geometria concepita come scienza razionale; rimangono i problemi didattici e rimane da esaminare se ed in quale misura l'esperimento quando sia rettamente inteso e praticato possa invece giovare nell'insegnamento.

Passeremo brevemente in rassegna qui di seguito alcuni degli aspetti positivi che può presentare l'esperimento in Geometria, senza pretesa di completezza nella enumerazione, ma al solo scopo di fornire agli insegnanti degli spunti di meditazione e degli orientamenti nel loro lavoro.

Un primo aspetto positivo dell'esperimento si incontra quando l'esperimento stesso è volto a stimolare la intuizione del contenuto dei teoremi. Da un certo punto di vista è questo l'aspetto più frequentemente considerato, ma di rado nella luce giusta: vorremo infatti ripetere ricordando le parole citate della Castelnuovo, che questo uso dell'esperimento va attentamente sorvegliato, per impedire che la intuizione del contenuto dei teoremi sia presentata incautamente come una prova della loro verità o come una sostituzione della necessaria dimostrazione. In altre parole, per citare un altro illustre Amico, occorre evitare accuratamente che la « *Geometria intuitiva* » si riduca semplicemente a « *Geometria razionale fatta male* », con un grave danno dei discenti.

Tuttavia, una volta fatta esplicitamente questa riserva, è chiaro che si apre alla iniziativa ed alla inventiva degli insegnanti un campo quanto mai vasto. Richiamando quanto abbiamo detto sopra sulle teorie fisiche e sugli ordini di approssimazione in cui i loro schemi sono validi, appare non irrazionale dedurre dagli esperimenti alcune regole pratiche (per es. per il calcolo delle aree) quando si abbia cura di avvertire che la loro validità è soggetta a quei limiti che abbiamo ripetutamente enunciati. Ed in questo riteniamo di poter rettamente interpretare anche il pensiero di chi ha scritto le premesse ai programmi, quando parla di « ... *sicura acquisizione di alcune essenziali regole* » aggiungendo che: « ... *giova allo scopo il far ricorso a procedimenti induttivi* ».

Un secondo aspetto, sotto il quale si può rendere utile il ricorso all'esperimento, è l'aiuto che questo può dare all'insegnante nel raddrizzare le idee false, che molto spesso il ragazzo si forma.

In questo ordine di idee all'esperimento è affidata una funzione che vorremo dire puramente « qualitativa », perchè esso viene escogitato per provare che « le cose non stanno così » e quindi può essere fatto in modo che abbia una macroscopica evidenza, senza lasciare dubbi che esso sia riuscito perchè le misure che si fanno entrano nel margine di tolleranza degli errori di osservazione.

A titolo di esempio ricordiamo l'esperimento che può essere fatto per togliere ai ragazzi l'idea che un rettangolo di data area abbia necessariamente un dato perimetro. Assegnato ai ragazzi il compito di costruire con un cartoncino, a casa, un rettangolo col solo vincolo che esso abbia un'area data, si possono confrontare il giorno dopo i risultati e misurare, con evidenza macroscopica, le diversità dei perimetri delle varie soluzioni .

Inoltre, riportando l'uno sull'altro tutti i rettangoli costruiti in cartoncino in modo che abbiano un angolo retto in comune, si dà adito all'insegnante di fornire una prima idea del concetto di coordinate cartesiane nel piano e di introdurre l'intuizione del concetto di « minimo » di una funzione.

Un terzo aspetto positivo dell'esperimento è la possibilità di variare gli oggetti di cui si parla, e di accrescere il numero di quelli percepiti; si riscontra così la possibilità di aiutare il discente a dare la massima generalità al concetto di cui ha appreso soltanto il nome, e di educarlo all'uso di un vocabolario esatto.

Spesso infatti il giovane è incapace di sollevarsi dalla definizione (magari in astratto giustissima) alla infinità dei contenuti di esperienze che possono cadere sotto di essa, oppure è incapace di svincolarsi da una esperienza ristretta che egli ha fatto o dall'unica figura che è stata tracciata sulla lavagna oppure che egli trova sul suo libro.

Quindi il moltiplicare le esperienze concrete può servire ad impedire che l'allievo fissi il suo pensiero su un unico oggetto e lo leghi ad una unica esperienza, in questo spesso aiutato dalla esposizione poco chiara dell'insegnante e dei testi.

Avremo così dei mezzi maggiori a nostra disposizione per evitare che gli allievi considerino un triangolo rettangolo *soltanto* se lo vedono in posizione «tradizionale» (cioè con uno dei cateti orizzontale in relazione all'osservatore supposto esistente). Ed eviteremo altre cause di equivoci ed errori alcune delle quali ricordiamo qui, a titolo di scarna esemplificazione: l'abitudine a considerare un sistema di coordinate cartesiane *soltanto* con l'asse delle x orizzontale, sempre rispetto ad un osservatore, ed orientato rispetto a questo da sinistra a destra e l'asse delle y verticale ed orientato dal basso all'alto; l'abitudine di usare come sinonimi i termini «verticale» e «perpendicolare» oppure «orizzontale» e «parallela»; l'abitudine di parlare della base e della altezza di un triangolo (come se ci fosse una sola base ed una sola altezza) oppure di enunciare teoremi del tipo «l'area del rettangolo si ottiene moltiplicando la base per l'altezza», come se i due lati del rettangolo dovessero avere una posizione precisa rispetto all'osservatore perchè abbia un senso la nozione di area ecc. ecc. ecc.

5. - Vogliamo infine ricordare brevemente qui un ultimo campo in cui l'esperimento concreto può dare aiuto e fornire idee: vogliam dire nell'analisi della struttura dell'insieme delle operazioni che si eseguiscono sugli oggetti concreti; qui la natura, che abbiamo voluto chiamare (per intenderci) «qualitativa» dell'esperimento, non è fonte di errori, ma anzi è atta a chiarire le idee che vogliamo far acquisire ai discenti.

È chiaro per es. che l'esperimento può chiarire immediatamente il fatto che il gruppo delle traslazioni che mutano una retta in se stessa è abeliano, così come abeliano è il gruppo delle rotazioni di un piano su se stesso attorno ad un centro fisso di rotazione.

Di contro, l'esperimento può far constatare facilmente che il gruppo dei movimenti rigidi del piano su se stesso non è un gruppo abeliano, e quindi può condurre molto facilmente alla nozione di gruppo di trasformazioni più generale.

Altri esempi saranno facilmente trovati dall'insegnante o sorgeranno spontanei nel corso dell'insegnamento, purchè questo sia concepito non come una trasmissione di dottrina, ma come un lavoro comune, diretto a svegliare nelle giovani menti la formazione attiva delle idee e la ricerca della loro organizzazione razionale.

Pensiamo che ciò che abbiamo esposto fin qui possa bastare per chiarire il nostro pensiero sull'argomento: riteniamo che l'uso dell'esperimento nell'insegnamento della Geometria, soprattutto della Geometria intuitiva, possa diventare di grande utilità, purchè l'esperimento stesso non sia adoperato in modo da essere fonti di equivoci.

Soltanto così l'esperimento sarà un ausilio importantissimo perchè la Geometria sia per i nostri scolari ciò che è stata per tutte le generazioni precedenti: la educazione alle idee chiare, al linguaggio corretto e rigoroso, alla deduzione ineccepibile. Queste sono doti intellettuali che soltanto l'insegnamento ben fatto può far conseguire e che nessun ausilio sperimentale può dare se manca il lavoro di educazione dell'insegnante; ma sappiamo bene del resto che ogni fatica che tende a questi scopi è una fatica bene impiegata e che non vogliamo rimpiangere.

C. F. MANARA

Azzoguidi - Soc. Tip. Edit. - Via Emilia Ponente 421/B - Bologna (Italy)

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

Levi-Civita - *Opere matematiche - Memorie e note.*	
— — Volume I: 1893-1900	8000
— — Volume II: 1901-1907	9000
— — Volume III: 1908-1916	9000
— — Volume IV: 1917-1928	9000
Levi-Civita e Amaldi - *Compendio di meccanica razionale.* Vol. I	2400
— — *Compendio di meccanica razionale.* Vol. II	2400
Levi-Civita e Amaldi - *Lezioni di meccanica razionale*:	
Vol. I: *Cinematica - Principî e statica*	6000
Vol. II: *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà* Parte I	4800
Vol. II: *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà* Parte II	6000
Melloni - *Opere.* Vol. I. Legato	5000
Montauti - *Il telemetro monostatico*	2000
Persico - *Introduzione alla fisica matematica*	4800
— — *Gli atomi e la loro energia.* Legato	6600
Righi - *Scelta di scritti*	4000
Rimini - *Elementi di elettrotecnica*	4800
— — *Fondamenti di radiotecnica generale*	5400
— — *Fondamenti di analisi matematica.* Vol. I	4800
— — *Fondamenti di analisi matematica.* Vol. II	7200
Sansone - *Equazioni differenziali nel campo reale.* Parte I	4800
— — *Idem.* Parte II seconda edizione - Legato.	6000
Scritti Matematici, offerti a Luigi Berzolari	2500
Supino E. - *Il disegno di macchine*	600
Toraldo di Francia - *Onde elettromagnetiche*	3600
Tricomi - *Funzioni ellittiche*	5400
— — *Funzioni analitiche*	2000
Vitali-Sansone - *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* Parte I	3600
— — Parte II	8200
Volta - *Epistolario.* Edizione nazionale. Vol. I	5000
— — Volume II	5000
— — Volume III	5000
— — Volume IV	6000
— — Volume V	6000
Zagar - *Astronomia sferica e teorica*	2500

ZANICHELLI - BOLOGNA